学校编码：10384　　　　分类号_______密级______
学号：19020110153993　　　　UDC_______

厦门大学

博　士　学　位　论　文

关于复 Finsler-Einstein 向量丛

On Complex Finsler-Einstein Vector Bundles

孙 丽 玲

指导教师姓名：　钟 春 平 教授，钟 同 德 教授
专 业 名 称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2014 年　4 月
论文答辩时间：　2014 年　5 月
学位授予日期：　　　年　　月

答辩委员会主席：___________
评　　阅　　人：___________

2014 年　5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文得到国家自然科学基金（项目资助号：11271304, 11171277）、福建省自然科学基金-杰出青年科学基金（项目资助号：2013J06001）、教育部新世纪优秀人才支持计划（项目资助号：NCET-13-0510）以及中央高校基本科研业务费（项目资助号：2012121006）的资助。”

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

本文的目的是研究复 Finsler-Einstein 向量丛. 我们首先研究了复 Finsler 空间的复 Finsler 联络, 从好的复垂直联络的角度, 对三种常见的复 Finsler 联络, 即复 Rund 联络、复 Berwald 联络、复 Hashiguchi 联络进行了整体的刻画; 其次我从两种不同的角度, 给出了复 Finsler-Einstein 向量丛的定义, 并得到一些有意思的结果.

第一章介绍了本文的研究背景和所得到的主要结果.

第二章研究了复 Finsler 流形上的复 Finsler 联络. 从好的复垂直联络的角度出发, 给出了复 Rund 联络、复 Berwald 联络和复 Hashiguchi 联络的整体性刻画. 给出了利用四种复 Finsler 联络定义的复 Finsler 度量的全纯截曲率、全纯双截曲率和 Ricci 数量曲率之间的关系式. 证明了在复 Finsler 度量为 Kähler-Finsler 度量时, 用 Chern-Finsler 联络、复 Rund 联络、复 Berwald 联络及复 Hashiguchi 联络定义的复 Finsler 度量的全纯截曲率、全纯双截曲率和 Ricci 曲率在局部坐标下具有相同的表达式,此时这三种曲率的定义并不依赖于这些复 Finsler 联络的选取. 我们研究了复 Finsler 度量的共形变换性质, 证明了弱的复Berwald度量的共形变换仍是弱的复 Berwald 度量, 并且得到了复Finsler 度量的全纯截曲率和Ricci数量曲率在共形变换下的一些性质.

第三章研究了复 Finsler-Einstein 向量丛. 我们利用 Chern-Finsler 联络在适用标架下的水平曲率分量给出了复 Finsler-Einstein向量丛的一个定义, 证明了我们用 Chern-Finsler 联络给出关于复 Finsler-Einstein 向量丛的定义 与 Aikou 用 partial 联络给出的关于复 Finsler-Einstein 向量丛的定义是等价的, 并证明了 Aikou 关于复 Finsler-Einstein 向量丛的定义中的函数 φ 仅依赖于底复流形上的坐标的必然性. 我们还证明了本章的一个主要结果(定理3.3), 即 Aikou 定义的(弱)的复 Finsler-Einstein 向量丛一定是(弱)的 Hermitian-Einstein 向量丛, 利用这个结果, 我们将 Hermitian-Einstein 向量丛的一个稳定性定理推广到了复 Finsler-Einstein 定理的情形(定理3.12). 利用 partial 联络的均值曲率, 我们定义了一个泛函, 证明了此泛函的下界与复 Finsler-Einstein 条件有关, 并对 partial 可约的复 Finsler 向量丛, 证明了该泛函有一个只仅依赖于 $c_1(E)$ 和 $[\Phi]$ 的同调类的常数下界, 这两个定理均可视为 Hermitian 度量的临界值定理在复 Finsler 度量情形的推广. 此外, 我们在 Chern-Finsler 联络的垂直均值曲率 $\dot{K}^i_i = 0$ 的情况下, 亦即对 Aikou 意义下的复 Finsler-Einstein 向量丛得到了一些结果, 并在最后一节得到了一些有关复 Finsler 度量及复 Finsler-Einstein 结构的无穷小形变的性质定理.

关键词： 复 Finsler 联络; 复 Rund 联络; 复 Berwald 联络; 全纯截曲率; 复 Finsler 向量丛; 复 Finsler-Einstein 向量丛

Abstract

This thesis presents a study of complex Finsler connections and complex Finsler-Einstein vector bundles. In this thesis, we first study complex Finsler connections and give a global characterization of three most often used complex Finsler connections, that is complex Rund connection, complex Berwald connection and complex Hashiguchi connection, from the viewpoint of good complex vertical connection. Then we give two definitions of complex Finsler-Einstein vector bundle from two different viewpoint. We show prove that a complex Finsler vector bundle is a weakly complex Finsler-Einstein vector bundle in the sense of Aikou if and only if the given complex vector bundle admits a Hermitian metric such that it is a actually a weakly Hermitian-Einstein vector bundle.

The first chapter gives some backgrounds and main results we obtained.

The second chapter present a study of complex Finsler connections on complex Finsler manifolds. We give a global characterization of complex Rund connection, complex Berwald connection and complex Hashiguchi connection from the viewpoint of good complex vertical connection. We obtain the local explicit formulae of holomorphic sectional curvature, holomorphic bisectional curvature and Ricci scalar curvature associated to Chern-Finsler connection, complex Rund connection, complex Berwald connection and complex Hashiguchi connection, respectively. It is proved that the holomorphic sectional curvature, holomorphic bisectional curvature and Ricci scalar curvature are independent of the choice of the most often used complex Finsler connections (Chern-Finsler connection, complex Rund connection, complex Berwald connection and complex Hashiguchi connection) in case that the given complex Finsler metric is Kähler-Finsler. We study the conformal property of complex Finsler metrics, and prove that the notion of weakly complex Berwald metric are conformal invariant, i.e., a complex Finsler metric is a weakly complex Berwald metric if and only if its conformal transformation is also a weakly complex Berwald metric. This paper also obtain the explicit formulae of the holomorphic curvature and Ricci scalar curvature of a complex Finsler metric under conformal transformation.

The third chapter study complex Finsler vector bundle. Using the horizontal curvature components of the Chern-Finsler connection in terms of the adapted frames, we give a definition of complex Finsler-Einstein vector bundle, and prove that our definition is actually equivalent to the definition of complex Finsler-Einstein vector bundle previously introduced by Aikou via using the horizontal curvature components of the complex Rund connection in terms of adapted frame. We prove that in the definition of complex Finsler-Einstein vector bundle in the sense of Aikou, the function φ is necessary a function defined on the base complex manifold. We also prove that a main result in this chapter, that is, a complex Finsler vector bundle is a weakly complex Finsler-Einstein vector bundle in the sense of Aikou if and only if the given complex vector bundle admits a Hermitian metric such that it is actually a weakly Hermitian-Einstein vector bundle. Using this theorem, we are able to extend a stability theorem of Hermitian-Einstein vector bundle to complex Finsler-Einstein vector bundle(Theorem 3.12). Using the mean curvature of the partial connection of a complex Finsler vector bundle we define a functional and prove that the lower bound of this functional is relevant to complex Finsler-Einstein. We also prove that for a partial reducible complex Finsler-Einstein vector bundle, this functional has a constant lower bound which depends only on $c_1(E)$ and the homology class $[\Phi]$. Both of the theorems are generalizations of the critic point of Hermitian metric to complex Finsler metric. In addition, we obtain some results under the assumption that the vertical mean curvature $\dot{K}_i^i$ vanishes identically, and in the last section we obtain some results about the deformation properties of complex Finsler metric and complex Finsler-Einstein structure.

Key Words: complex Finsler connection; complex Rund connection; complex Berwald connection; holomorphic sectional curvature; complex Finsler vector bundle; complex Finsler-Einstein vector bundle.

目　录

CONTENTS

第一章　引言*

Finsler 几何是已故著名数学家陈省身教授晚年积极倡导的研究课题([27],[28]), 也是现代数学研究的一个重要前沿领. 实 Finsler几何的研究成果已经在物理学、生物学、工程技术、几何光学、控制论和广义相对论等学科中得到广泛应用([22],[26]).

然而, 著名数学家陈省身教授预言 Finsler 几何在复的情形也许最为有用, 因为在适当假设下(例如在 $\mathbb{C}^n$ 空间中的有界的具有光滑边界的强凸区域上), 每个带边或不带边的双曲复流形均有两次连续可微的复 Finsler 度量, 即 Kobayashi 度量 和 Carathédory 度量, 它们均给出了全纯映射的距离缩小性质, 从而复 Finsler 度量与多复变几何函数论自然地联系在一起([31]). 熟知, Poincaré度量是单位圆中的全纯不变度量, 具有许多好的性质. 著名的 Carathéodory 度量和 Kobayashi 度量乃是 Poincaré 度量在高维复流形上的推广, 这两类度量, 尤其是 Kobayashi 度量在研究复流形间的全纯映射问题时具有重要应用. 在一般情况下, Carathéodory 度量仅是连续的, Kobayashi 度量仅是上半连续的, 然而, Lempert 证明了一个重要而基本的结果, 即在 $\mathbb{C}^n$ 空间中具有光滑边界的有界的强凸区域上, Carathéodory 度量和 Kobayashi 度量相同, 而且均是 Finsler 意义下的光滑度量, 即该度量的平方在复流形的全纯切丛的零截面外是光滑的,并且是强凸的复 Finsler度量. 这个重要的结果使得用微分几何的方法来研究光滑的复Finsler度量既是可行的, 也是必要的. 近20年来, 光滑的强拟凸的复 Finsler 度量的几何吸引了一些微分几何和多复变学者的研究, 并日益受到重视.

实 Finsler 几何就是没有二次型限制的 Riemann 几何 [31]. 从这个角度来说, 复 Finsler 几何就是没有 Hermitian 二次型限制的 Hermitian 几何. 1965 年, Rizza [53] 首次研究了复 Finsler 度量的几何. 1967年, Rund [54] 研究了复 Finsler 度量所满足的强齐次条件(也称为绝对齐次条件), 并在局部坐标下利用张量分析的方法导出了复 Finsler 度量的联络系数和实测地线方程. 在文章 [54] 的基础上, 1972 年 Rund [54] 研究了复流形上依赖切方向的复联络以及依赖于切方向的 Hermitian 张量关于该复联络的共变微分, 建立了类似于经典的 Hermitian 微分几何中的 Bianchi 恒等式. 在该文中, Rund 还首次定义了两类曲率张量, 其中第一类可视为 Kähler 度量的曲率张量的推广, 第二类虽然在经典的 Hermitian 几何中并没有对应物, 但当复流形容许一个强拟凸的复 Finsler 度量的情况下, Rund 在该文中证明了这样的复 Finsler 度量的第二类曲

* 国家自然科学基金(项目批准号: 11271304, 11171277)、 福建省自然科学基金-杰出青年科学基金（项目资助号：2013J06001）、教育部新世纪优秀人才支持计划（项目资助号：NCET-13-0510）以及中央高校基本科研业务费（项目资助号：2012121006）资助.

率张量恒为零. 值得注意的是, Rund 在 [54] 中所得到的强拟凸的复 Finsler 度量的联络也称为复 Rund 联络([49],[63],[65],[57]).

熟知, 紧复流形上的全纯向量丛如果容许一个纤维度量的曲率为正的 Hermitian 度量, 则该全纯向量丛是 ample 的. 但反过来，一般来说是不对的. 为了从微分几何的角度来刻画 ample 向量丛, 也需要用到强拟凸的复 Finsler 度量.

1975 年, Kobayashi [41] 证明了全纯向量丛是 Negative (亦即其对偶丛是ample) 的充分必要条件是该向量丛容许一 个纤维度量的曲率为负的强拟凸的复 Finsler 度量(亦可参见 [41] 的一个新近的版本 [42]). Kobayashi在 [41] 和[42] 中用到的 复 Finsler 联络即为复 Finsler 度量在拉回丛(或向量丛的全纯切丛的垂直子丛上)诱导的 Hermitian 联络, 也称为 Chern-Finsler 联络(参见[1]).

1990年, Faran [36] 利用 Cartan 的活动标架法研究了复 Finsler 度量的局部等价性问题, 并在 Kobayashi 度量为光滑的情形下给出了它的一个刻画.

Pang [52], Abate 和 Patrizio [2]-[4] 从微分几何的角度对 $\mathbb{C}^n$ 中的有界、强凸区域上的 Kobayashi 度量的几何性质进行了一系列的研究, 并给出了 $\mathbb{C}^n$ 中的圆型域的一个刻画.

1996年, Faran [37] 在其文章的最后提出了 5 个公开问题, 其中第 3 个问题问的是: 对于复 Finsler度量, 是否有类似 Kähler-Einstein 条件这样的概念? 对于复 Finsler 度量而言, 比常全纯曲率条件更弱的曲率条件是什么?

1996年, Kobayashi [42] 首先给出了复 Finsler-Einstein 向量丛的定义. 设 E 为复流形 M 上的全纯向量丛, $g = g_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha d\overline{z}^\beta$ 为 M 上的 Hermitian 度量, $F(z,\zeta)$ 为 E 的纤维度量, 它是一个强拟凸的复 Finsler 度量. 令

$$H_{i\overline{j}} = g^{\overline{\beta}\alpha}R_{i\overline{j}\alpha\overline{\beta}}, \quad H = H_{i\overline{j}}\zeta^i\overline{\zeta}^j, \tag{1.1}$$

其中 $(g^{\overline{\beta}\alpha})$ 为 $(g_{\alpha\overline{\beta}})$ 的逆矩阵, $R_{i\overline{j}\alpha\overline{\beta}}$ 为 F 的 Chern-Finsler 联络在E的全纯切丛TE的自然标架下的水平曲率, 在文献 [42] 中, H 称为复 Finsler 度量 F 的均值曲率. 记 $G = F^2$, 若存在某个常数 c, 使得 $H = cG$, 则称 F 是复 Finsler-Einstein度量 [42]. 如果 F 来自一个 Hermitian 度量, 则 $G_{i\overline{j}}$ 和$H_{i\overline{j}}$ 均不依赖于纤维坐标 ζ, 从而复 Finsler-Einstein 条件 $H = cG$ 等价于

$$H_{i\overline{j}} = cG_{i\overline{j}}, \quad 即 \quad H_{i\overline{j}}Z^i\overline{Z}^j = cG_{i\overline{j}}Z^i\overline{Z}^j. \tag{1.2}$$

但正如 Kobayashi [42] 指出的, 在复 Finsler 的情形, $H_{i\overline{j}}Z^i\overline{Z}^j$ 并不具有不变意义, 即其定义不是内蕴的. 于是 Kobayashi[42] 问, 该 Einstein 条件有没有什么代数几何结论? 例如在 g 为 M 上的 Kähler 度量的情况下, 是否 M 上的每个 Finsler-Einstein 向量丛

均是半稳定的?

1997年，Aikou[9] 对这个问题进行了研究. Aikou 首先用 partial 联络定义 (E,F) 的均值曲率如下:

$$\mathcal{K}_j^i = g^{\bar\beta\alpha}\mathcal{R}^i_{j\alpha\bar\beta} \tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{R}^i_{j\alpha\bar\beta} = -\delta_{\bar\beta}(\Gamma^i_{j\alpha})$ 是 F 在 E 的全纯切丛 TE 的适用标架下的 partial 联络的水平曲率分量. 如果 $\mathcal{K}^i_j = \varphi(z)\delta^i_j$, 其中 $\varphi(z)$ 是 M 上的函数, 则称 (E,F) 是 (M,g) 上的一个弱的复 Finsler-Einstein 向量丛; 当 $\varphi(z) = c$ 为常数时, 称 (E,F) 为 (M,g) 上的一个复 Finsler-Einstein 向量丛. 因为 $\mathcal{R}^i_{j\alpha\bar\beta}$ 是一个张量, 故 Aikou 给出的复 Finsler-Einstein 向量丛的定义具有不变性. Aikou [9] 证明了紧 Kähler 流形上的全纯向量丛如果容许一个复 Finsler-Einstein 度量, 且满足一些额外条件的话, 那么该 Finsler 向量丛是半稳定的. Aikou 在 [7] 中对全纯截曲率为常值且非正的模于复 Minkowski 空间的复流形进行了分类, 但对全纯截曲率为正常数的复 Finsler 流形的分类仍有待研究.

2004年, Aldea [17]-[20] 提出并研究了广义 Einstein 流形的概念. 设复流形 M 上的度量是一个强拟凸的复 Finsler 度量, 设

$$R^i_{jk\bar l} = -\delta_{\bar l}(\Gamma^i_{j;k}) - \delta_{\bar l}(\Gamma^m_k)\Gamma^i_{jm}$$

是 F 的 Chern-Finsler 联络的水平曲率分量在 $T^{1,0}\tilde M$ 的适用标架下的局部表示, $R_{\bar jk} = R_{i\bar jk\bar l}v^i\bar v^l$ 为相应的 Ricci 张量. 令 $t_{k\bar j} = G(z,v)G_{k\bar j} + v_k\bar v_j$, 其中 $v_k = G_{k\bar m}\bar v^m$. 若存在一个定义在全纯切丛 $T^{1,0}M$ 的零截面外的实值函数 $K(z,v)$ 使得 $R_{\bar jk} = K(z,v)t_{k\bar j}$, 则称 (M,F) 是一个广义的 Einstein 流形. Aldea [17]-[20] 对这类复 Finsler 流形的全纯曲率做了一系列的研究.

2007 年, 王必敏教授 [58] 也把“推广 Hermitian-Einstein 向量丛到复 Finsler-Einstein 向量丛”这一问题列为公开问题，并在[59] 中进行了初步的研究, 王必敏教授在该文中给出了复 Finsler-Einstein 向量丛的另外一种定义. 设 (M,g) 为紧 Kähler 流形, $\pi: E\to M$ 为全纯向量丛, E 的纤维度量为强拟凸的复Finsler度量 F. 记 $\mathbb{P}(E)$ 为 E 的射影化丛, $\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{P}(E)$ 上的超平面线丛(hyperplane bundle), $c_1(\mathcal{L},F)$ 为 $\mathcal{L}$ 的第一陈类, 则存在常数 C, 使得

$$[g] = C\pi^*g + c_1(\mathcal{L},F)$$

为 $\mathbb{P}(E)$ 上的 Kähler 度量. 记 $\mathcal{V}_{\mathbb{P}(E)}\in T\mathbb{P}(E)$ 为垂直子丛, 则 $u_F = \left(\frac{\partial^2\log G}{\partial\xi^i\partial\bar\xi^j}\right)$ 为 $\mathcal{V}_{\mathbb{P}(E)}$ 上的一个 Hermitian 度量. 若 $(\mathcal{V}_{\mathbb{P}(E)}, u_F)$ 是 $(\mathbb{P}(E),[g])$ 上的 Hermitian-Einstein 向量丛, 则称 (E,F) 是 (M,g) 上的复 Finsler-Einstein 向量丛.

从以上对复 Finsler-Einstein 向量丛的研究可以看出, 对复 Finsler-Einstein 向量丛

的研究还刚刚开始, 其中仍有大量问题待搞清楚. 例如, 仅就复 Finsler-Einstein 向量丛的定义就有多种, 这些定义从不同角度推广了 Hermitian-Einstein 向量丛的概念. 熟知, 复 Finsler-Einstein 向量丛的定义的关键之处是如何对纤维度量为更一般的复 Finsler 度量定义 好所谓的“均值曲率”. 在 Hermitian 向量丛的情形, 纤维度量是 Hermitian 度量, 有典则的 Hermitian 联络可用. 但在复 Finsler 情形, Finsler 度量的基本张量不是定义在底复流形上的, 而是定义在流形的全纯切丛上, 确切地说是定义在流形的射影化切丛上, 且没有典则的复 Finsler 联络. 常用的复 Finsler 联络就有多种, 例如

1. Chern-Finsler 联络 [1][41][42], 它质上是垂直丛上的 Hermitian联络, 也是复 Finsler几何中最重要、最常用的复 Finsler 联络;

2. 复 Rund 联络 Rund [55], 它的联络 1-形式只是 Chern-Finsler 联络 1-形式的水平部分;

3. 复 Berwald 联络 [49], 它是个对称的联络, 它的联络 1-形式只是复 Hashiguchi联络的水平部分;

4. 复 Hashiguchi 联络, 它也是个对称的联络, 这个联络是实 Finsler 几何 [47] 中的 Hashiguchi 联络在复 Finsler 情形的一个类似版本.

以上四种复 Finsler 联络的联络形式均是 $(1,0)$-型的微分形式, 它们与复 Finsler 度量在垂直丛上诱导的 Hermitian 度量具有不同程度的相容性, 且这些联络的 $(2,0)$-型挠率具有不同程度的消失性.

为了研究复 Finsler-Einstein 向量丛, 需要用到复 Finsler 联络, 因此我们首先有必要 弄清楚这些常见复 Finsler 联络之间的关系.

一个自然的问题是, 这些联络是否均是 Abate 和 Patrizio[1] 意义下的好的复垂直联络? 能否给这些复 Finsler 联络一个整体性的刻画? 另外, 对于这些复 Finsler 联络, 从微分几何的观点来看, 可以定义相应复 Finsler 联络的全纯截曲率、全纯双截曲率、 Ricci 数量曲率等. 一个自然的问题是, 这些曲率的定义会依赖于这些特殊的复 Finsler 联络的选取吗?

本文的第二章将从 Abate 和 Patrizio[1] 中定义的好的复垂直联络的观点出发, 给出复 Rund 联络、复 Berwald 联络和复 Hashiguchi 联络的整体性刻画, 并对更为一般的好的复垂直联络, 给出其全纯截曲率、全纯双截曲率、Ricci数量曲率的定义. 特别地, 得到 Chern-Finsler 联络、复 Rund 联络、复 Berwald 联络和复 Hashiguchi 联络所对应的全纯截曲率, 全纯双截曲率和 Ricci 数量曲率的关系. 我们接着研究了复 Finsler 度量的共形变换性质, 证明了一个强拟凸的复 Finsler 度量为弱的复 Berwald 度量的充分必要是其共形变换后为弱的复 Berwald 度量, 这个结果表明钟春平教授在 [66] 中所定义的弱的复 Berwald 度量是大量存在的. 本章的主要结果是: